

Σύνθετα Θέματα

- 1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΜΖΓ.
- 2. Αρκεί γων. ΒΖΓ = γων. ΖΒΓ.
- 3. i) Το άθροισμα ισούται με το ύψος ΒΗ (σταθερό).  
ii) Από το τυχαίο σημείο Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ και εφαρμόζουμε το i).

§5.6 - 5.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

- 1. Τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ.
- 2. Τα Δ, Η και Ζ, Ε είναι μέσα πλευρών.
- 3. Οι ΕΜ, ΔΜ είναι διάμεσα ορθογωνίων τριγώνων.
- 4. Τα Ε, Ζ είναι μέσα πλευρών και  $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ .
- 5. Να λάβετε υπόψη σας την ιδιότητα του βαρύκεντρου.
- 6. Το Ε είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΓΔ.
- 7. Το ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο και  $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ .

Αποδεικτικές Ασκήσεις

- 1. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΕΖ  
ii) Η ΔΜ διάμεσος και τα Ε, Ζ μέσα πλευρών.
- 2. Φέρουμε την ΔΒ.
- 3. Είναι  $Μ\hat{Α}Δ + Δ\hat{Μ}Α = 90^\circ$  και  $\hat{Β} + \hat{Γ} = 90^\circ$ .
- 4. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
- 5. Φέρουμε την ΑΓ. Τα Κ, Η είναι βαρύκεντρα τριγώνων.
- 6. Παίρνουμε το μέσο Ζ του ΑΓ.
- 7. i) Να αποδείξετε ότι το ΒΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.  
ii) Το Η είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΓ.
- 8. Είναι  $ΜΔ = ΑΔ$  και  $ΜΔ = \frac{ΔΒ}{2}$ .
- 9. Αν Μ το σημείο τομής των ΕΗ και ΚΖ, αρκεί  $\hat{Μ} = 90^\circ$ .
- 10. Ο δρόμος συνδέει τα μέσα των αποστάσεων.

Σύνθετα Θέματα

- 1. Είναι  $ΕΖ \parallel ΑΒ$  και  $ΔΕ = ΕΓ$ .
- 2. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, τότε  $Α\hat{Μ}Γ = 30^\circ$ .
- 3. Είναι  $ΖΗ // \frac{ΚΓ}{2}$  και Κ βαρύκεντρο.
- 4. Παρατηρήστε ότι  $\hat{Β} = 2\hat{Ε} = 2\hat{Γ}$ .
- 5. Προεκτείνουμε την ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ.
- 6. Είναι  $ΒΜ \parallel ΕΓ$  και Η ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΜ.
- 7. i) Απλό ii) Αν Ο το μέσο του ΑΒ, αρκεί  $ΟΚ // ΒΓ$ .
- 8. i) Απλό. ii) Με άθροισμα γωνιών σε κατάλληλο τρίγωνο. iii) Αν Κ το σημείο τομής των ΑΜ και ΔΖ αρκεί  $ΒΚ // ΕΖ$ .

§5.10 - 5.11

Ασκήσεις Εμπέδωσης

- 1. Η ΕΖ διάμεσος τραπεζίου και Η, Θ μέσα πλευρών τριγώνου.
- 2.  $ΔΕ // ΒΓ$  και  $\hat{Β} = \hat{Γ}$ .
- 3.  $ΕΗ = ΘΖ$  και Ε, Ζ, Η, Θ μέσα πλευρών τριγώνου.
- 4.  $ΚΕ = \frac{ΑΔ}{2}$  και  $ΚΛ // ΔΓ$ .
- 5. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ.
- 6. Η ΜΔ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΒΒΤ'Τ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

- 1. Αρκεί  $ΗΖ = ΒΖ$ .
- 2. Το Ζ είναι σημείο της μεσοκαθέτου και το ΖΗΒΓ ισοσκελές τραπέζιο.
- 3. Φέρουμε  $ΒΕ \perp ΔΓ$ , τότε  $Ε\hat{Β}Γ = 30^\circ$ .
- 4. Παίρνουμε το μέσο Ε της ΑΔ.
- 5. Αρκεί  $ΜΕ = \frac{ΒΓ}{2}$ .
- 6. Είναι  $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2}$  και Δ, Ε, Ζ, μέσα πλευρών τριγώνου.
- 7. Να λάβετε υπόψη σας το πόρισμα.
- 8. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση. Για να είναι ορθογώνιο πρέπει  $ΑΓ = ΒΔ$ .

- 9. Η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΕΒΓΔ.
- 10. Βρείτε κατάλληλα τραπέζια με διάμεσο την ΚΚ'.

Σύνθετα Θέματα

- 1. Αν η διχοτόμος της  $\hat{Α}$  τέμνει την ΒΓ στο Ε αρκεί ΔΕ διχοτόμος της  $\hat{Δ}$ .
- 2. Φέρουμε  $ΜΕ \perp ΑΔ$ .
- 3. Αν Κ το κέντρο του ΑΒΓΔ φέρουμε  $ΚΚ' \perp ε$ .
- 4. Η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΔΕΓΑ, οπότε ....  $\hat{Β} = 30^\circ$ .
- 5. i) Αποδείξτε ότι το ΑΒΜΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο ii) Η προέκταση της ΑΕ τέμνει την ΔΓ στο Ζ.

Γενικές Ασκήσεις

- 1. Αν  $ΑΒ < ΑΓ$  είναι  $ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} < \frac{ΑΓ}{2}$  και  $ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2} > \frac{ΑΒ}{2}$ .
- 2. Παίρνουμε το μέσο Μ του ΔΕ.
- 3. α) Τα τρίγωνα ΑΒ'Β και ΑΕ'Ε είναι ισοσκελή β) Αποδείξτε ότι  $Β'Ε' = Γ'Ε'$ .
- 4. α) απλό β) Αρκεί  $Η\hat{Ε}Ζ = Ζ\hat{Ε}Γ$  γ)  $ΗΕ = \frac{ΑΒ}{2} = ΖΓ$  δ) Από το γ) προκύπτει ότι  $\hat{Γ} = 2Ζ\hat{Ε}Γ$ .
- 5. Παίρνουμε το μέσο Δ του ΒΚ και φέρνουμε  $Δ'Δ \perp ε$ .
- 6. α) απλό β) Το Η είναι ορθόκεντρο του τριγ. ΑΔΖ.
- 7. Παρατηρήστε ότι  $ΜΛ // \frac{ΒΗ}{2}$  και  $ΜΚ // \frac{ΕΓ}{2}$ .
- 8. α) Το Μ είναι το μέσο του ΟΓ και το Ζ βαρύκεντρο του τριγ. ΒΟΓ.  
β) Να λάβετε υπόψη σας το α).
- 9. i) Φέρουμε ΟΚ διάμεσο στο τριγ. ΟΑΒ. Αρκεί να τέμνει την ΔΓ στο μέσο Λ.
- 10. Φέρουμε από τα Δ και Ε κάθετες στις ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα.

Σύνθετα Θέματα

- 1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΜΖΓ.
- 2. Αρκεί γων. ΒΖΓ = γων. ΖΒΓ.
- 3. i) Το άθροισμα ισούται με το ύψος ΒΗ (σταθερό).  
ii) Από το τυχαίο σημείο Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ και εφαρμόζουμε το i).

§5.6 - 5.9

Ασκήσεις Εμπέδωσης

- 1. Τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ.
- 2. Τα Δ, Η και Ζ, Ε είναι μέσα πλευρών.
- 3. Οι ΕΜ, ΔΜ είναι διάμεσα ορθογωνίων τριγώνων.
- 4. Τα Ε, Ζ είναι μέσα πλευρών και  $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ .
- 5. Να λάβετε υπόψη σας την ιδιότητα του βαρύκεντρου.
- 6. Το Ε είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΓΔ.
- 7. Το ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο και  $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ .

Αποδεικτικές Ασκήσεις

- 1. i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΑΕΖ  
ii) Η ΔΜ διάμεσος και τα Ε, Ζ μέσα πλευρών.
- 2. Φέρουμε την ΔΒ.
- 3. Είναι  $Μ\hat{Α}Δ + Δ\hat{Μ}Α = 90^\circ$  και  $\hat{Β} + \hat{Γ} = 90^\circ$ .
- 4. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.
- 5. Φέρουμε την ΑΓ. Τα Κ, Η είναι βαρύκεντρα τριγώνων.
- 6. Παίρνουμε το μέσο Ζ του ΕΓ.
- 7. i) Να αποδείξετε ότι το ΒΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.  
ii) Το Η είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΓ.
- 8. Είναι  $ΜΔ = ΑΔ$  και  $ΜΔ = \frac{ΔΒ}{2}$ .
- 9. Αν Μ το σημείο τομής των ΕΗ και ΚΖ, αρκεί  $\hat{Μ} = 90^\circ$ .
- 10. Ο δρόμος συνδέει τα μέσα των αποστάσεων.

Σύνθετα Θέματα

- 1. Είναι  $ΕΖ \parallel ΑΒ$  και  $ΔΕ = ΕΓ$ .
- 2. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, τότε  $Α\hat{Μ}Γ = 30^\circ$ .
- 3. Είναι  $ΖΗ // \frac{ΚΓ}{2}$  και Κ βαρύκεντρο.
- 4. Παρατηρήστε ότι  $\hat{Β} = 2\hat{Ε} = 2\hat{Γ}$ .
- 5. Προεκτείνουμε την ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ.
- 6. Είναι  $ΒΜ \parallel ΕΓ$  και Η ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΜ.
- 7. i) Απλό ii) Αν Ο το μέσο του ΑΒ, αρκεί  $ΟΚ // ΒΓ$ .
- 8. i) Απλό. ii) Με άθροισμα γωνιών σε κατάλληλο τρίγωνο. iii) Αν Κ το σημείο τομής των ΑΜ και ΔΖ αρκεί  $ΒΚ // ΕΖ$ .

§5.10 - 5.11

Ασκήσεις Εμπέδωσης

- 1. Η ΕΖ διάμεσος τραπεζίου και Η, Θ μέσα πλευρών τριγώνου.
- 2.  $ΔΕ // ΒΓ$  και  $\hat{Β} = \hat{Γ}$ .
- 3.  $ΕΗ = ΘΖ$  και Ε, Ζ, Η, Θ μέσα πλευρών τριγώνου.
- 4.  $ΚΕ = \frac{ΑΔ}{2}$  και  $ΚΛ // ΔΓ$ .
- 5. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΖΓ.
- 6. Η ΜΔ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΒΒΤ'Τ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

- 1. Αρκεί  $ΗΖ = ΒΖ$ .
- 2. Το Ζ είναι σημείο της μεσοκαθέτου και το ΖΗΒΓ ισοσκελές τραπέζιο.
- 3. Φέρουμε  $ΒΕ \perp ΔΓ$ , οπότε  $Ε\hat{Β}Γ = 30^\circ$ .
- 4. Παίρνουμε το μέσο Ε της ΑΔ.
- 5. Αρκεί  $ΜΕ = \frac{ΒΓ}{2}$ .
- 6. Είναι  $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2}$  και Δ, Ε, Ζ, μέσα πλευρών τριγώνου.
- 7. Να λάβετε υπόψη σας το πόρισμα.
- 8. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση. Για να είναι ορθογώνιο πρέπει  $ΑΓ = ΒΔ$ .

- 9. Η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΕΒΓΔ.
- 10. Βρείτε κατάλληλα τραπέζια με διάμεσο την ΚΚ'.

Σύνθετα Θέματα

- 1. Αν η διχοτόμος της  $\hat{Α}$  τέμνει την ΒΓ στο Ε αρκεί ΔΕ διχοτόμος της  $\hat{Δ}$ .
- 2. Φέρουμε  $ΜΕ \perp ΑΔ$ .
- 3. Αν Κ το κέντρο του ΑΒΓΔ φέρουμε  $ΚΚ' \perp ε$ .
- 4. Η ΖΗ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΔΕΓΑ, οπότε ....  $\hat{Β} = 30^\circ$ .
- 5. i) Αποδείξτε ότι το ΑΒΜΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο ii) Η προέκταση της ΑΕ τέμνει την ΔΓ στο Ζ.

Γενικές Ασκήσεις

- 1. Αν  $ΑΒ < ΑΓ$  είναι  $ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} < \frac{ΑΓ}{2}$  και  $ΑΕ = \frac{ΑΓ}{2} > \frac{ΑΒ}{2}$ .
- 2. Παίρνουμε το μέσο Μ του ΔΕ.
- 3. α) Τα τρίγωνα ΑΒ'Β και ΑΕ'Ε είναι ισοσκελή β) Αποδείξτε ότι  $Β'Ε' = Γ'Ε'$ .
- 4. α) απλό β) Αρκεί  $Η\hat{Ε}Ζ = Ζ\hat{Ε}Γ$  γ)  $ΗΕ = \frac{ΑΒ}{2} = ΖΓ$  δ) Από το γ) προκύπτει ότι  $\hat{Γ} = 2Ζ\hat{Ε}Γ$ .
- 5. Παίρνουμε το μέσο Δ του ΒΚ και φέρνουμε  $Δ'Δ \perp ε$ .
- 6. α) απλό β) Το Η είναι ορθόκεντρο του τριγ. ΑΔΖ.
- 7. Παρατηρήστε ότι  $ΜΛ // \frac{ΒΗ}{2}$  και  $ΜΚ // \frac{ΕΓ}{2}$ .
- 8. α) Το Μ είναι το μέσο του ΟΓ και το Ζ βαρύκεντρο του τριγ. ΒΟΓ.  
β) Να λάβετε υπόψη σας το α).
- 9. i) Φέρουμε ΟΚ διάμεσο στο τριγ. ΟΑΒ. Αρκεί να τέμνει την ΔΓ στο μέσο Λ.
- 10. Φέρουμε από τα Δ και Ε κάθετες στις ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα.